Ein Satz über die Unlösbarkeitsgrade der Mengen von natürlichen Zahlen

Oberschelp, Arnold

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 12, 1960, S.1-3

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Ein Satz über die Unlösbarkeitsgrade der Mengen von natürlichen Zahlen

Von **Arnold Oberschelp**

Vorgelegt von **Th. Kaluza**

Eingegangen am 22. 6. 1960

Summary: It is proved that if a degree (in the upper semi-lattice of Kleene and Post) contains an immune set then the same is true for all greater degrees. In combination with a result of Dekker this yields the existence of immune representatives for a large class of arithmetical degrees.

Übersicht: Es wird bewiesen, daß mit einem Unlösbarkeitsgrad (in der *Kleene-Post*schen Halbordnung) auch alle größeren Grade eine immune Menge enthalten. Mit einem Resultat von *Dekker* folgt dann die Existenz immuner Repräsentanten für eine große Klasse von arithmetischen Graden.

Zwischen irgend zwei Mengen A, B von natürlichen Zahlen ist die Relation *A ist B-rekursiv* erklärt, die etwa folgendes bedeutet:

Es gibt ein effektives Verfahren, welches für jede natürliche Zahl x in endlich vielen Schritten zu entscheiden gestattet ob $x \in A$, falls man dabei ein *Orakel* zur Verfügung hat, das in jedem gewünschten Fall für eine natürliche Zahl y darüber Auskunft gibt ob $y \in B$.

Das Entscheidungsproblem für A ist dann also reduziert auf das Entscheidungsproblem für B. Man schreibt auch $A \leq_T B$ und sagt, A sei von nicht höherem *Unlösbarkeitsgrad* in bezug auf Turing-Reduzierbarkeit als B. Die Unlösbarkeitsgrade, kurz *Grade*, sind dann die Abstraktionsklassen der Äquivalenzrelation $A \equiv_T B =_{Df} A \leq_T B \wedge B \leq_T A$. Sie bilden auf natürliche Weise eine Halbordnung, den *Kleene-Postschen Halbverband* (siehe [2]), der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen ist, die teils seine algebraische Struktur, teils Repräsentanten besonderer Art in den Graden betreffen.

In dieser Note wird ein einfacher Satz über derartige und zwar immune Repräsentanten bewiesen. Dabei heißt eine Menge A von natürlichen Zahlen *immun* genau dann, wenn gilt:

(1) A ist unendlich,

(2) A enthält keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge.

Es sei erwähnt, daß eine Menge, die nicht immun ist, besonders „anfällig" ist in bezug auf das Enthalten von Teilmengen. Sie enthält Mengen aller Grade, ja sogar zu einer jeden Menge, ihr Bild vermöge einer eineindeutigen rekursiven Funktion.

Satz: Wenn der Grad a einen immunen Repräsentanten hat und $a \leq b$, so hat auch der Grad b einen immunen Repräsentanten.

Beweis: Sei $B \in b$ und $A \in a$ und A immun. Wir konstruieren eine Menge B^*, für die gilt:

$$B^* \equiv_T B \quad \text{und} \quad B^* \text{ ist immun.}$$

Konstruktion von B^*:

$$B_1 =_{Df} \{z | \bigvee x \bigvee y \, (z = 2^x \, 3^y \wedge x \in B) \vee \neg \bigvee x \bigvee y \; z = 2^x \, 3^y \}$$
$$A_x =_{Df} \overline{A} \cup \{y | y \leq x\}$$
$$B_2 =_{Df} B_1 \cup \{z | \bigvee x \bigvee y \, (z = 2^x \, 3^y \wedge y \in A_x)\}$$
$$B^* =_{Df} \overline{B}_2$$

Es sind B, $\overline{B}$ nicht leer, da sonst B rekursiv und $b = \mathbf{0}$ und damit auch $a = \mathbf{0}$ wären ($\mathbf{0}$ = Grad aller rekursiven Mengen). Aber A ist nicht rekursiv. Sei also $x_0 \in B$ und $x_1 \in \overline{B}$. Wir setzen

$$f(z) =_{Df} \begin{cases} x_0, & \text{wenn } \neg \bigvee x \bigvee y \; z = 2^x \, 3^y \\ x, & \text{wenn } z = 2^x \, 3^y \end{cases}$$

f ist rekursiv, und es gilt: $z \in B_1 \leftrightarrow f(z) \in B$.

Sei z gegeben.

Wenn $f(z) \in B$, so $z \in B_1$ und $z \in B_2$.

Wenn $f(z) \notin B$, so $z \notin B_1$ und z ist ein geordnetes Paar $2^x \, 3^y$. Dann gilt: $z \in B_2 \leftrightarrow y \in A_x$. Da $A \leq_T B$, ist auch $\overline{A} \leq_T B$ und $A_x \leq_T B$. Die Relation $y \in A_x$ ist also B-rekursiv.

Mithin: B_2 ist B-rekursiv.

Seien $x_2, \ldots, x_n$ die endlich vielen Zahlen kleiner oder gleich x_1 aus A. Sei y gegeben, dann gilt:

$$y \in A \leftrightarrow y = x_2 \vee \ldots \vee y = x_n \vee (y > x_1 \wedge 2^{x_1} \, 3^y \notin B_2).$$

Folglich: A ist B_2-rekursiv.

Sei x gegeben.

Man prüfe die Zahlen $x + 1$, $x + 2$, $\ldots$ durch, bis man eine Zahl $y \in A$ findet. Das ist ein B_2-rekursives Verfahren, das stets zum Ziele führt, da A unendlich ist. Dann gilt:

$$x \in B \leftrightarrow 2^x \, 3^y \in B_2.$$

Also: B ist B_2-rekursiv.

Insgesamt folgt $B \equiv_T B_2$, und da eine Menge und ihr Komplement stets im selben Grad liegen, ergibt sich:

$$B^* \equiv_T B.$$

B^* besteht nur aus Paaren $2^x \, 3^y$ mit $x < y$ und $y \in A$. Ist jetzt R unendlich und $R \subset B^*$ und

$$P =_{Df} \{y | \bigvee z \bigvee x \, (z = 2^x \, 3^y \wedge z \in R)\},$$

so ist P unendlich und $P \subset A$. Wenn ferner R rekursiv aufzählbar ist, so ist auch P rekursiv aufzählbar. Aber A ist immun, folglich:

$$B^* \text{ ist immun.}$$

Dieser Satz ist freilich nur dann nützlich, wenn man bereits Grade mit immunen Repräsentanten kennt. Das ist jedoch der Fall.

Nach *Post* [3] gibt es zur Menge $\{x | \bigvee y\, T(x, x, y)\}$ (aus $\mathbf{0}'$, dem höchsten Grad, der rekursiv aufzählbare Mengen enthält) eine simple Menge vom gleichen Grad. Das Komplement einer simplen Menge ist jedoch immun. Mithin haben insbesondere alle arithmetischen Grade $\geq \mathbf{0}'$ einen immunen Repräsentanten.

Nach *Dekker* [1] gibt es sogar zu jeder echt rekursiv aufzählbaren Menge eine hypersimple Menge vom gleichen Grad. Jede hypersimple Menge ist aber insbesondere simpel. Demnach könnten unter den arithmetischen Graden $\neq \mathbf{0}$ nur noch solche Grade ohne immunen Repräsentanten sein, die in der *Kleene-Mostowski*-Hierarchie ganz in $(P_2 \cap Q_2) - (P_1 \cup Q_1)$ liegen und zu denen es auch keine echt rekursiv aufzählbare Menge aus einem kleineren Grad gibt.

Bemerkung: Für die oben betrachteten Mengen R, P gilt offenbar: Wenn R C-rekursiv aufzählbar ist, so ist auch P C-rekursiv aufzählbar. Würde man also den Begriff der *C-immunen* Menge einführen, indem man in (2) „C-rekursiv aufzählbar" schriebe, so würde mit demselben Beweis der entsprechende Satz gelten.

Literatur

[1] *J. Dekker:* A Theorem on Hypersimpel Sets. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), S. 791–796.

[2] *S. C. Kleene* und *E. L. Post:* The Upper Semi-lattice of Degrees of Recursive Unsolvability. Annals of Mathematics 59 (1954), S. 379–407.

[3] *E. L. Post:* Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and Their Decision Problems. Bulletin Amer. Math. Soc. 50 (1944), S. 284–316.